

解答 1

出題者 西山豊

応募者は20代3名, 30代3名, 40代9名, 50代15名, 60代10名, 70代4名, 80代1名の計45名でした. 24通りとするものが正解で正解者は20名でした. 答案の分布は, 12通りとしたものが14名(31%), 24通りとしたものが20名(45%), 48通りとしたものが6名(13%), その他が5名(11%)でした.

12通りか, 24通りか, 48通りかの三択問題のようになりましたが, 12通りとした答案はバンドの重なり方に2種類あるのに気づけなかったもの, 48通りとした答案は北極と南極では色の順序が逆回りになっていることに気づけなかったものでした. どちらも気づかず答えが偶然24通りになったという答案はありませんでした.

また, 6色のバンドであるから,

$$6! = 720通り$$

となるのではないかと思ったが, 解いてみて意外と少なかったと感想を寄せられる方が多くありました. 一方, 競技用セパタクローの公式球は出題の写真と重なり方が逆になっているという指摘もありましたが, バンドの重なり方に関係なくセパタクローボールとしてあつかうことにしました.

図1は色の組合せだけで考えた12通りのボールを実際に作ってみて確認したもので, 図2はバンドの重なり方に2種類あることを示したものです.

正解者の20名はほぼ同様な方法で解かれましたが, これらの答案を参考にしながら説明します. セパタクローボールの作成法より考えて正五角形が12個できます(作り方は[1]を参考にしてください). ボールを地球に見立てて赤道, 北極, 南極といった言葉を用いることにします. バンドの色を①~⑥とします.



図1. 色の組み合わせでは12通り



図2. バンドの重なり方に2種類

1つの正五角形(北極)に注目し, その正五角形をPとします. Pの5つの辺は5色のバンドで構成され, 6色目のバンドは, 対称性よりPの中心と球の中心を通る直線に垂直な大円(赤道)となります. このバンドを①と固定して考えます.

Pの5辺を構成する②~⑥のバンドの配置は円順列で

$$4! = 24通り$$

となります.

Pの真裏(南極)の正五角形の配置は上下反転するとともに, 色の順序が逆回りになっています(図3). ある配置とその逆回りを重複して数えているので

$$24 \div 2 = 12通り$$

となります.

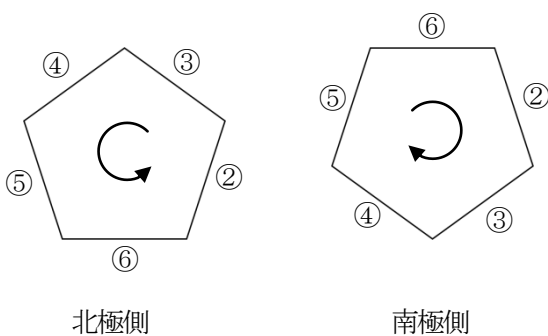


図3. 北極と南極では色の順序が逆回り

また、三すくみに注目すると、図4のようにバンドの重なり方は2種類あることがわかるので

$$12 \times 2 = 24 \text{通り}$$

となり、これが答えとなります。

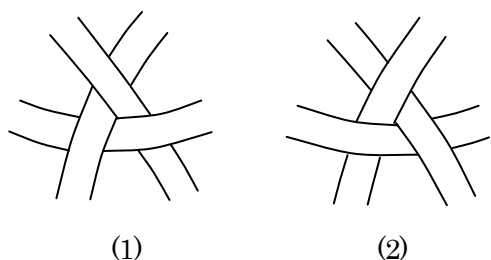


図4. 三すくみに2種類

セパタクローボールは

- (1) 3本のバンドを三すくみにすること
 - (2) 5本のバンドで正五角形を作ること
- という2つの規則を守れば自然と出来上がります[1]. 正五角形が12個、正六角形が20個できますので、サッカーボールと同じ準正32面体となります。図5では空洞(黒色)が正五角形、バンドの重なった場所に点線を描くと正六角形となります。このボールを作成したことのない読者は是非とも作ってみてください。

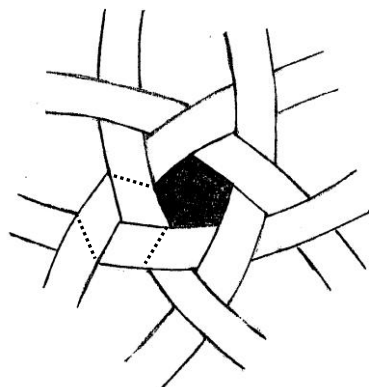


図5. 空洞が正五角形、点線で囲むと正六角形

編集部から出題の依頼があったとき、良い問題が作れないので今回はパスしようかと思っていたところ、アメリカから突然メールが送られてきました。金属ハロゲン化物に関する論文の告知で、私とは無縁のように思えましたが、よく読んでみると、この論文に私のセパタクローに関する記事が引用されていたのです[2][3]。この分子がフラレンC₆₀と同類の構造を持つようで、セパタクローの編み方に2種類あることを教えていただきました。キラルまたは光学異性体という性質は、化学では特に重要なようです。

今回の出題と解答にあたって、エレガントな解答とは一体何だろうかと考えました。頭脳のひらめきというより、実際に手を動かしてボールを作ってみるといふ泥臭い作業がエレガントな解答ではと思いました。

(参考文献)

- [1] 西山豊「セパタクローで数学を」『数学を楽しむ』現代数学社, 111~121 ページ
- [2] Y. Nishiyama, The Sepak Takraw Ball Puzzle, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2012, **79**, 281–291.
- [3] A. Tlahuic-Flores, *et al.*, Structure & bonding of the gold-subhalide cluster FAu₁₄₄Cl₆₀^[2], *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2013, **15**.

[にしやまゆたか/大阪経済大学情報社会学部]