

# 52 巡回トランプ

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

「数学を楽しむ／52 巡回トランプ」『理系への数学』2008 年 12 月, Vol.41, No.12, 4-7 に掲載

## 1. カードを当てる

イギリスの知人からトランプを使った面白い手品がある, 仕組みは秘密にして欲しいと言ってメールがきた。それは次の通りである。トランプのカードは 1 から 13 の数字と 4 種類の絵柄で合計 52 枚ある。それぞれのカードは数字と絵柄があり, 絵柄には数字を対応しておく。たとえば, スペードは 1, ハートは 2, クラブは 3, ダイヤは 4 というように。

現在のカードの数字を 2 倍して, 上で定義した絵柄の数字を加える。計算結果が 13 を超えているなら 13 で割って余りを求める。これが次のカードの数字だ。その数字を参考にして次の絵柄が決まる。数字が 1 から 3 までなら今と同じ絵柄, 4 から 6 までなら同色の絵柄, 7 から 9 までなら前の絵柄, 10 から 13 までなら後の絵柄になる。

この法則で 52 枚のカードを並べておけば, すべてのカードをつぎつぎと当てることができるというのだ。本当だろうか。こんなことができるのだろうか。52 枚のカードはある規則により巡回しているというので, ここでは「52 巡回トランプ」と呼ぶことにしよう。

私は, 半信半疑だった。この種の話はよくある話で, 私は 30 年ほど前に手品に凝っていた時期があり, カードを当てるというのを経験したことがある。研究室のダンボール箱の中を探してみると当時集めた手品に図 1 のようなものが見つかった。マジックトランプというもので, トランプの裏の絵柄を見て, そのカードが何であるかを当てるというものだ。左がダイヤの 9 で, 右がスペードの 5 である。手品にはもちろん仕掛けがしてあり, 模様をよく見れば仕掛けはわかる。

今回のトランプの手品も, 図 1 のようなマジックトランプの類であろうと, 知人のメールにはあまり気乗りがしなかったが, 調べてみるとこのような小手先ではなく, 数学の原理を用いた手品であることがわかった。

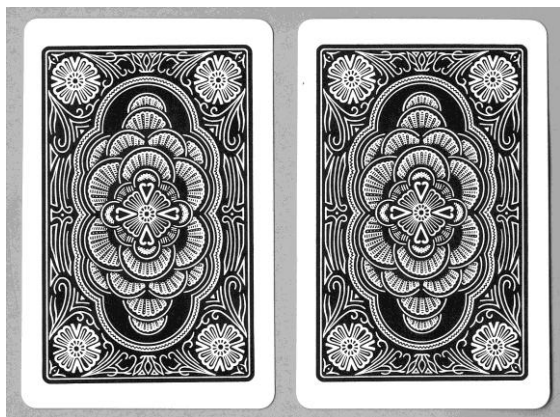


図 1. マジックトランプ (左: ダイヤの 9, 右: スペードの 5)

## 2. 52 巡回トランプ

そこで, もういちど手順を詳しく説明しておこう。トランプは数字が 1 から 13 までである。数字の 2 から 10 はそのままであるが, 数字の 1 はエースで A の文字が, 11 はジャックで J の文字が, 12 はクィーンで Q の文字が, 13 はキングで K の文字が書かれている。絵柄は 4 種類あり, スペードとクラブは黒色, ハートとダイ

ヤは赤色である。計算のため表1のように絵柄と数字の対応表を作成しておく。スペードは1で、ハートは2で、クラブは3で、ダイヤは4で、黒色と赤色が交互になるほうがよい。

スペード (♠)	1
ハート (♥)	2
クラブ (♣)	3
ダイヤ (◇)	4

表1. 絵柄に数字を対応させる

いま仮に一番上のトランプがスペード (♠) の8であったとして、次のカードを当ててみよう。数字の8を2倍して絵柄の数字を足す。スペード (♠) は1であるから、

$$8 \times 2 + 1 = 17$$

となる。トランプの数字は13までであり、17は13を超えているから13の倍数を引き、その余りを求めると4になる。

$$17 - 13 = 4$$

$$17 \equiv 4 \pmod{13}$$

これが次のカードの数字である。一般式では、現在の数字を $n$ 、絵柄の番号を $s$ とすると、新しい数字 $m$ は、

$$m = n \times 2 + s \pmod{13}$$

となる。ただし、計算結果が13の倍数の場合は、13で割ると余りが0となるので、このときは数字を13とする。

そして、新しい数字 $m$ に対して、絵柄が表2のように決まる。数字が1から3までなら同じ絵柄、4から6までなら同色の絵柄、7から9までなら前の絵柄、10から13までなら後の絵柄となる。新しい数字 $m$ は4であるから、表2より4～6の同色の絵柄となる。スペード (♠) は黒色であり、同色の絵柄はクラブ (♣) になる。つまり、スペード (♠) の8の次はクラブ (♣) の4ということになる。

数字	絵柄
1～3	同じ絵柄
4～6	同色の絵柄
7～9	前の絵柄
10～13	後の絵柄

表2. 数字と絵柄の対応

練習のため、クラブ (♣) の4のつぎを計算してみよう。クラブ (♣) の絵柄の番号は3であるから、新しい数字は、

$$4 \times 2 + 3 = 11$$

となる。11は数値が10～13の範囲にあるから、後の絵柄ということで絵柄はダイヤ (◇)、つまり11のダイヤ (◇) ということになる。

規則と計算方法はわかった。それでも私は、この規則で52枚のすべてのカードを並べることができるのか疑問であった。表計算ソフトを使って、知人の説明するところを、ひとつずつ確認してみた。そして、つぎつぎと作り出されるカードの列が、52枚のすべてのカードを一巡するのを知って、私はある種の感動を覚えた。

参考までに、図2は52枚のカードが重複することなく巡回していることを示している。図は次のように見て

ください。左端の列には縦方向に数字の1 (A) から13 (K) までが並べてあり、上端の行には横方向に絵柄のスペード (♠) からダイヤ (◇) までが並べてあり数字の1から4までを対応させてある。

スペード (♠) のエース (A) の次を知るためには、その格子点のマスをみると (3 ♠) となっているので、つぎはスペード (♠) の3ということになる。

スペード (♠) の3のつぎは、その格子点のマスをみると (7 ◇) となっているので、つぎはダイヤ (◇) の7である。読者は、この続きを2～3回計算することによって、図2の見方を理解してください。

図2は表計算ソフトを使って作成してもよいが、52回も計算しなければならないので、計算ミスや転記ミスの可能性がある。Visual BASIC などのプログラムでなら20行程度の命令文を書くだけで求めることができる。私は、Visual BASICで処理して確認した後、その結果を図2のように清書した。

	1	2	3	4
	♠	♡	♣	◇
A	3 ♠	4 ◇	5 ♠	6 ♡
2	5 ♣	6 ◇	7 ♡	8 ♣
3	7 ◇	8 ♠	9 ♡	10 ♠
4	9 ◇	10 ♣	J ◇	Q ♠
5	J ♡	Q ♣	K ◇	A ◇
6	K ♡	A ♡	2 ♣	3 ◇
7	2 ♠	3 ♡	4 ♠	5 ♡
8	4 ♣	5 ◇	6 ♠	7 ♣
9	6 ♣	7 ♠	8 ♡	9 ♣
10	8 ◇	9 ♠	10 ◇	J ♠
J	10 ♡	J ♣	Q ◇	K ♠
Q	Q ♡	K ♣	A ♣	2 ◇
K	A ♠	2 ♡	3 ♣	4 ♡

図2. 52巡回トランプ

図2は多くの情報を含んでいて理解しづらいので、便宜的に数字だけを示したのが図3である。これは先に示したように、次のカードの数字 $m$ は、現在の数 $n$ を2倍して絵柄の番号 $s$ を足す。そして13を超えるようだったら13で割って余りを求める。52個のマス目の中に、1から13までの数字がそれぞれ4個ずつ配置されていて、数字の上では問題ないことになる。

	1	2	3	4
	♠	♥	♣	◇
1	3	4	5	6
2	5	6	7	8
3	7	8	9	10
4	9	10	11	12
5	11	12	13	1
6	13	1	2	3
7	2	3	4	5
8	4	5	6	7
9	6	7	8	9
10	8	9	10	11
11	10	11	12	13
12	12	13	1	2
13	1	2	3	4

図3. 数字の巡回

図4は計算された新しい数字 $m$ と絵柄 $s$ との対応である。1から3は同じ絵柄で、4から6は同色の絵柄で、7から9は前の絵柄で、10から13は次の絵柄でグループ分けがしてある。数字と絵柄を組み合わせることによってランダム度が増すことになっている。

	1	2	3	4
	♠	♥	♣	◇
1	3	4	5	6
2	5	6	7	8
3	7	8	9	10
4	9	10	11	12
5	11	12	13	1
6	13	1	2	3
7	2	3	4	5
8	4	5	6	7
9	6	7	8	9
10	8	9	10	11
11	10	11	12	13
12	12	13	1	2
13	1	2	3	4

図4. 絵柄との対応

### 3. 1から52までの乱数

トランプの枚数は52であるので、ここでは別の角度から1から52までの数字の乱数を生成することについて考えてみよう。

一般に、素数と原始根の関係を用いて擬似乱数を生成することができる。たとえば、素数7に対する原始根3の関係を用いると、つぎのように1から6までの乱数を作ることができる。

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 3^1 \times 3 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^3 = 3^2 \times 3 \equiv 2 \times 3 \equiv 6$$

$$3^4 = 3^3 \times 3 \equiv 6 \times 3 \equiv 18 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$3^5 = 3^4 \times 3 \equiv 4 \times 3 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3^6 = 3^5 \times 3 \equiv 5 \times 3 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

原始根3のべき乗を計算していき、素数7-1=6を超える場合は素数7で割って余りを求めると、

3, 2, 6, 4, 5, 1

になる。これは、7を法として $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ は巡回群となるとも言う。そして、乱数の性質である、前後の値に影響されないという「独立性」と全体を巡回するという「一様性」を満たしている。

一般に、素数 $p$ と互いに素な数 $r$ については、 $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

の関係が成り立ち、これを「フェルマーの小定理」という。素数 $p$ は必要条件で、素数以外の数は周期 $p-1$ の乱数が作れない[1]。

素数7に対する原始根のひとつが3であるように、素数 $p=53$ に対する原始根 $r$ があれば、1から52までの乱数を生成することができる。そこで、素数53に対して原始根となる数を1から52までの数字をVisual BASICで調べてみた。そして、つぎの数が原始根 $r$ になることがわかった。

2, 3, 5, 8, 12, 14, 18, 19, 20, 21,  
22, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 41,  
45, 48, 50, 51

である。読者はどの数を選んで、53回で元の数に戻ることを確認してください。

素数が53の場合は、原始根が24個あり、素数53で割ると約45%の比率で原始根が存在することになる。原始根が多く存在することは意外だった。これは、素数53の場合だけが特別に多いのだろうか。そこで、1から100までの素数25個について原始根の数とその比率を調べてみると、原始根の比率が最大であるのは素数83に対して原始根が40個の48%で、最小であるのは素数31に対して原始根が8個の26%で、平均して37%であった。素数53の場合が特別に原始根の数が多いのでもなかった。

素数の分布が素数定理として知られているように、素数 $p$ に対する原始根 $r$ の個数は、 $p$ が無限大になるときどのような値に近づくのか興味があるところだ。これには近似式があるのだろうか。

以上、素数と原始根による1から52までの乱数について説明したが、この原理をトランプの手品に適用することは可能である。しかし、計算が複雑になり、暗算で答えを求めるのには難しく手品には現実的でない。

#### 4. トランプはなぜ52枚か

現在、世界でもっとも多く使われているトランプは52枚のものである。トランプの枚数や絵柄は最初から決まっていたのだろうか。

トランプの起源については、いろいろな説があり、通説は確立していないが、東洋で発生し、ヨーロッパに渡り、発展していったという事は一致している。現在の形に近いトランプは、14世紀後半に、ヨーロッパ各国に現われ、それ以後に図柄・形・枚数・名称など、国によって種々変化している。絵柄のスペードは剣の変形で軍閥・王侯を、ハートは洋盃で僧職を、ダイヤは貨幣で商人を、クラブは棍棒で農民を象徴しているとされ

る。52枚が世界標準タイプとなったのは、19世紀から20世紀にかけてイギリスやアメリカで、このタイプのものが流行したことと、当時の国際的な力関係による。

トランプの枚数が52枚についてはいろいろな俗説がある。たとえば、

(1) 4つの絵柄は四季を示し、季節ごとに13週あるので52週となる。 $13 \times 4 = 52$

(2) 1から13までを合計すると91になり、これは季節の日数である。これに4をかけると1年の日数364になる。1日足りないのがジョーカーが用意されている。もう一枚のジョーカーは閏年(1年が366日)のためである。

(3) 1から13の英文字 ace, two, three, ..., king のすべてのスペルの文字を合計すると52になる。

(3)はともかく2枚のジョーカーの理由はもっともらしく思える。しかし、これらはまったく根拠がなく俗説であることが1983年に出版されたオルネイ・リッチモンドの本に示されている(英語版 Wikipedia, Playing Cardの項より)。

さて、私は52巡回トランプを作る規則はこれだけなのだろうか疑問に思った。そして Visual BASIC のプログラムを使って、数式や絵柄の対応表を変更してほかに規則が作れるか試してみた。すると、つぎの規則も52巡回トランプになることがわかった。

現在の数字を  $n$ 、絵柄の番号を  $s$  とすると、新しい数字  $m$  は、

$$m = n \times 3 + s \pmod{13}$$

とする。先の式では数を2倍したが、今回は3倍にする。そして絵柄との対応は、数字が7から9は同じ絵柄に、10から12は同色の絵柄に、4から6は前の絵柄に、1から3と13は後の絵柄に変更する(表3)。計算式と絵柄の対応を変えると別の52巡回トランプが作れることになる。

数字	絵柄
7~9	同じ絵柄
10~12	同色の絵柄
4~6	前の絵柄
1~3, 13	後の絵柄

表3. 数字と絵柄の対応(その2)

他にも52巡回トランプの条件を満たす手順が見つかったが、計算の桁が大きく暗算には向かず、絵柄との対応も複雑になった。規則が単純で計算しやすいのは最初に紹介した規則であることは言うまでもない。

規則が唯一でないことがわかったのは私にとってひとつの発見だった。別解が存在することをイギリスの知人にメールで知らせた。彼は大変喜んでいて、この手品は他言しないでねと言われたが、日本の数学の雑誌に掲載することぐらいは了解してもらえらると思う。読者は手持ちのトランプでいちど試してみてください。

## 参考文献

[1] 西山豊『数学を楽しむ』現代数学社、2007年、pp.182-189、第21章「乱数の仕組みを明かす」

(にしやまゆたか/大阪経済大学)