

扇風機の数理

西山豊



〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8 大阪経済大学 情報社会学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

2017年7月9日更新

1. 扇風機が逆に回って見える

最近ではエアコンが普及して扇風機を見る機会が少なくなった。それでもときどき、扇風機についての質問を受けることがある。扇風機は逆に回って見えることがあります。どうしてですかと。私は約30年前に「扇風機にひそむ数理」というエッセイを書いた。扇風機が逆に回って見える理由がわかれば、その原理を応用して扇風機の回転速度を推定できるというものであった⁽¹⁾。環境もだいぶ変わっているので、このときまとめたものを補足する形で以下その理由を説明していこう。

扇風機の羽根は3枚または4枚のものがあるが、ここでは3枚としよう。扇風機に電源を入れるとモーターは右回転でまわりだす。回転の速度が増すにつれて扇風機の実際の回転とは違った回転を見ることが出来る。実際の回転よりは遅くて右回転している状態、止まって見える状態、モーターの回転とは反対の左回転をしている状態の3通りだ。これを仮想回転とよび、順行、停止、逆行ということにしよう(図1)。



図1 3つの仮想回転

これらの現象はストロボ効果という用語ですべてが説明できる．ストロボとはストロボ・ライトの略で写真撮影用の閃光装置のことをいう．扇風機を蛍光灯や電灯の断続的な光の下で見るから，こういう現象が起こるのである．扇風機を屋外に持ち出し，太陽の連続的な光の下で見たら仮想回転を見ることはできない．もちろん，このような馬鹿げた実験をするのは私ぐらいだろうが．

蛍光灯や電灯の明かりは交流電源でともされる．直流の場合は電流が一定であるから灯も一定であるが，交流の場合は \sin 波が示すように日本では 1 秒間に 50 ないし 60 回の周期を持つ波であるから電流が一定でなく，灯も断続的である．人間の認識できる映像のコマは 1 秒間に 10 枚程度であるといわれるから，電灯が断続的に点滅しているとは感じないのである．この断続的な光のもとで扇風機を見た場合どうなるのか，その模式図を図 2 に示そう．

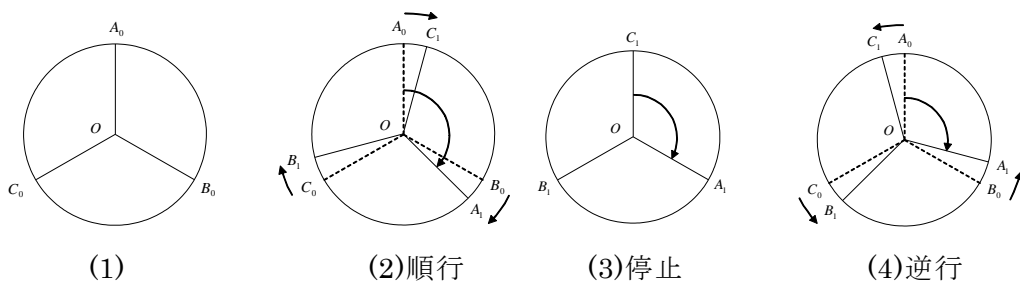


図2 実回転と仮想回転

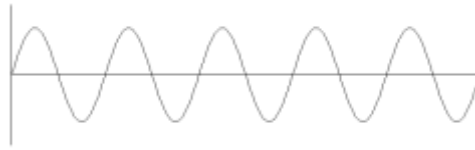
3 枚の羽根を A, B, C とし，最初の羽根の位置が OA_0, OB_0, OC_0 であったとする (図 2(1))．電灯がつぎに光るとき，羽根が 120 度近く回転して OA_1, OB_1, OC_1 の位置まで進んだとしよう．このとき私たちの目に映るのは， OA_0 が OA_1 に，

OB_0 が OB_1 に， OC_0 が OC_1 に移動したと理解するのではなく，前に見た羽根の位置ともっとも近いものを元の羽根と錯覚して見るのである．つまり，私たちの目には， OA_0 が OC_1 に， OB_0 が OA_1 に， OC_0 が OB_1 に移動したと見るのである．電灯の点滅する1周期の間に扇風機の回転が120度よりわずかに進んでいるときは順行，120度ちょうどのときは停止，120度より少ないときは逆行の仮想回転が見えるのである（図2(2)～(4)）．

2. 交流電流と整流

さて，蛍光灯や電灯が点滅する周波数はどの程度であろうか．ご存知のように交流周波数は西日本では60Hz，東日本では50Hzである．せまい日本になぜこの2つが存在するのだろうか．明治維新はまだ幕末の対立関係が続いていて，それぞれの派閥が関係の深い外国の発動機を購入した．東京電燈（現在の東京電力）は1895年にドイツのアルゲネ社製50Hzの，大阪電燈は1897年にアメリカのGE社製の60Hzの交流発電機を導入し，それが東日本では50Hz，西日本では60Hzのものを採用するようになった．周波数を何度か統一する機会があったが，統一されないまま現在に至っている．

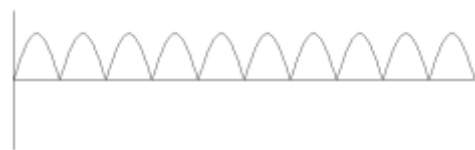
私は，交流周波数が50Hzまたは60Hzであるから，電灯は1秒間に50回または60回の点滅が起こっていると理解していた．ところが読者から交流電流には整流というのがあり，実際はこの2倍の100回または120回の点滅が起こっていると手紙をいただいた．このことを図3で説明しよう．50Hzの交流電流がある．交流電流は直流電流と違い，Sin波で表される．正の領域と負の領域があり，電流が意味を持つのは正の領域だけで，その部分を取り出すと半波整流となる．この段階では点滅は50Hzである．明るさを必要としない自転車のテールランプなどは半波整流でよい，と説明している本もある．戦後まもなくのときは半波整流だったかもしれない．整流子を2個使い，負の領域の電流の向きを変えて両波整流すると点滅の周期は100Hzとなる．現在のほとんどの電灯は両波整流である．



(1)電流(50Hz)



(2)半波整流(50Hz)



(3)両波整流(100Hz)

図3 整流

このように電灯の点滅は 100Hz または 120Hz であるので，電灯の下で扇風機を見たところで最初に説明した扇風機の仮想回転を見ることは難しい．そこで，実際にどうすれば仮想回転を見ることが出来るかを説明していこう．そのためには扇風機の規格について説明する必要がある．私はある電機会社の扇風機事業部に研究目的だと断って扇風機の回転数を教えて欲しいと手紙を書いたことがある．いまでも，この回転数は大きくは変わっていないと思う．ある扇風機の回転数は西日本 60Hz では微風が 720 回転／分，涼風が 1040 回転／分，強風が 1390 回転／分の 3 段階とあった．

モーターの回転数は 1 分間を基準にすることが多いが，電灯の周波数は 1 秒間を基準になっているので，こちらを 1 秒間を基準にして計算しなおしておく．これでいくと，微風は 12 回転／秒，涼風は 17.3 回転／秒，強風は 23.2 回転／秒となる．平均して約 20 回転／秒になる．3 枚羽の扇風機だとすると 60Hz の電灯のもとだったら，1/60 秒の間におよそ 120 度回転している計算になる．つまり扇風機が強風になる前後に，仮想回転の順行，停止や逆行が観測できるはずである．ところが先に説明したように電灯は両波整流の関係で周期が 100Hz または 120Hz となっているため観測は難しい．

	50Hz	60Hz
微風	800 (13.3)	720 (12.0)
涼風	1050 (17.5)	1040 (17.3)
強風	1280 (21.3)	1390 (23.2)

単位:回転/分, ()内は回転/秒

表 扇風機の回転速度

では、どうすればよいのか。蛍光灯や電灯をあきらめテレビを利用する。ブラウン管方式のテレビでは走査線といって1秒間に30コマの画像が送り出されてくる。30Hzは蛍光灯より小さい周波数である。テレビ画像の前で手を振ってみると手がちらついて見える。テレビが1秒間に30回の断続的な映像を送っているためだ。

ブラウン管方式のテレビは525本の走査線があり、左上端から右下端までを1秒間に30回描くようになっている。この走査方式ではテレビ画像がちらつき人間の目によくはないということで、現在は奇数行を60Hzで走査し、偶数行を60Hzで走査するというインターレース(飛び越し走査)方式がとられている。またテレビ画像はブラウン管方式から液晶画面やプラズマ画面になり、このような現象が見られるかどうかわからない。ということでますます、扇風機が逆に回って見える環境が少なくなっているのも事実である。

3. 映画の中の扇風機

ところが最近、つぎのような質問を受けた。電灯の下でなく昼間でも扇風機が逆に回って見えることがあるので、ストロボ効果が逆にまわる理由でないというのだ。この場合、2つのことが考えられる。実際に太陽光のもとで逆回転しているのを見たか、それともテレビ画像または映画の1シーンとして見たのかだ。後者の場合、TVあるいは映画のフィルムは連続的なものではなく、1秒間に何コマかの静止画が記録され、それがストロボ効果となっている。映画は1秒間に24コマ、テレビは30コマである。

映画が24コマになるまでには歴史がある。映画の映写速度は人間の残像の視覚特性から経験的に求められてきた。最初は10コマ/秒だったが、動きが滑らかでないため16コマ/秒になる。コマが少ないのはフィルムが非常に高

価なもので消費量を抑えたかったためである。またフィルムは可燃物であるので、コマ数を増やして高速に回すと火災事故が発生しやすかったこともある。トーキーの時代になってフィルムの端に音を記録するようになると 16 コマ/秒では音がギクシャクするので、最終的に 24 コマ/秒になり、これが世界標準になっている。

24 コマ/秒の映画や 30 コマ/秒のテレビで撮影された扇風機を見るとどうなるのだろうか。それは蛍光灯や電灯のストロボ効果で説明したように、1 秒間に 24 コマまたは 30 コマの断続的な映像を見ていることになり、同じ現象がおこる。映画やテレビの場合は電灯に比べて周波数が小さいため仮想回転を見ることが容易である。戦前の白黒映画の扇風機、西部劇に出てくる幌馬車の車輪、ヘリコプターの翼、テレビのコマーシャルで映し出される自動車のホイール、これらが逆回転しているのを見た人は多いと思う。

4. 扇風機の回転数を推論する

以上のことを、数式を使って説明してみよう。ストロボの周波数を n_1 (Hz)、扇風機の周波数を n_2 (Hz) とする。どちらも周期的な関数なので Sin 波であらわすと、時刻を t ($0 \leq t \leq 1$) として

$$y_1(t) = \sin 2\pi n_1 t \quad (1)$$

$$y_2(t) = \sin 2\pi n_2 t \quad (2)$$

となる。このとき観測される仮想回転の周波数 n_3 (Hz) は $n_3 = n_2 - n_1$ の関係があり、次式となる。

$$y_3(t) = \sin 2\pi(n_2 - n_1)t \quad (3)$$

具体的な例として、10 回/秒で点灯するストロボ灯で 9 回/秒で回転する羽根を見ると 1 回/秒で逆回転する仮想回転を見ることがになる。数値でいうと $n_1 = 10, n_2 = 9, n_3 = 9 - 10 = -1$ であり、この概略を図 4 に示す。

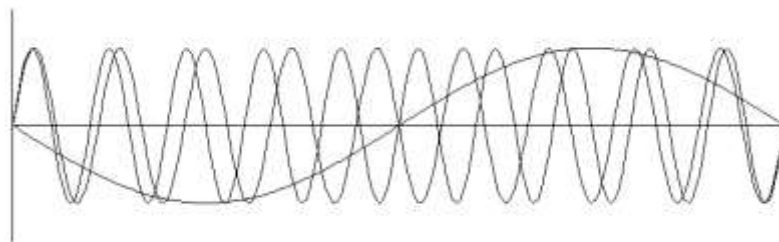


図4 回転体とストロボ灯の関係

同様にして 100Hz で回転するプロペラに 100Hz の光源をあてるとプロペラは停止しているように観察できるはずである。99Hz の光源をあてると回転方向と同じ順行で 1Hz のゆっくりした仮想回転が、101Hz の光源をあてると逆方向でゆっくりした仮想回転が見えることになる。映画などでヘリコプターのローターがゆっくり回転しているように見えるのは、映画のコマ数の倍数とプロペラの回転数がほぼ一致しているからである。

テレビ画面の前に扇風機を置いて扇風機を見ることとしよう。テレビの受像機は 30Hz、つまり 1 秒間に 30 回の断続的な光が出ている。1/30 秒後に羽根が 1/3 回転、2/3 回転、1 回転していれば扇風機はあたかも停止しているように見える。1 秒間に換算すると $30/3=10$ 回転、 $30 \cdot 2/3=20$ 回転、 $30 \cdot 1=30$ 回転の速度で回っているときである。実回転速度を n_1 回転/秒、仮想回転速度を n_2 回転/秒とすると、つぎの関係がある。

$$n_2 = f(n_1) = n_1 - 10i$$

$$(10i - 5 \leq n_1 < 10i + 5, \quad i = 0, 1, \dots, m)$$

図 5 (1)の直線関数が示すように扇風機の回転速度に比例した回転運動が観測されるはずだが、同図(2)の「のこぎり刃関数」が示すように、回転速度の範囲は ± 5 回転/秒が上限と下限の仮想回転が観測される。 $n_2 < 0$ のとき逆行、 $n_2 = 0$ のとき停止、 $n_2 > 0$ のとき順行で、これが繰り返される。また、扇風機は 3 枚羽であるが、羽根の位置によっては 6 枚羽や 9 枚羽の 3 の倍数の羽根を観測することもある (図 6)。実際は細かい 12 枚羽を見ることがよくある。以上の知識を駆使すれば、仮想回転から扇風機の実際の回転速度を推定することも可能である。

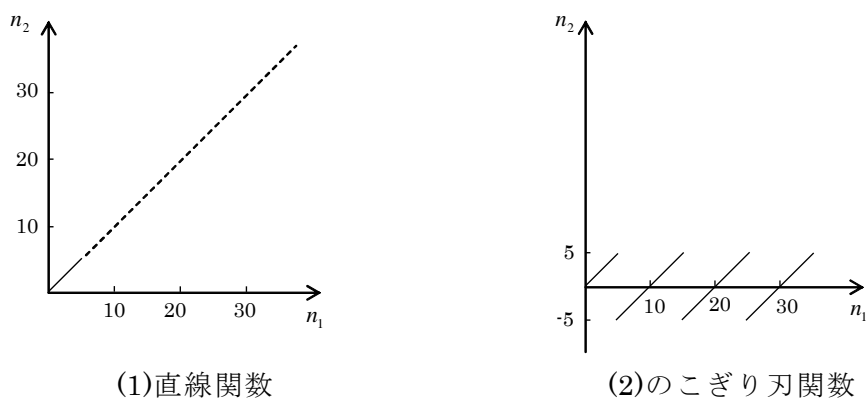


図5 実回転数と仮想回転数

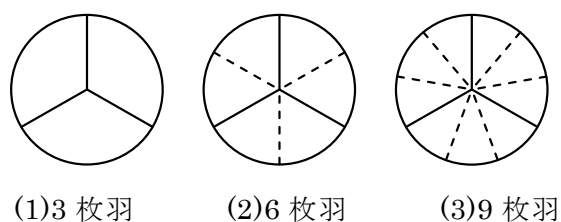


図6 倍数羽の発生

5. ストロボスコープの応用

扇風機が逆に回って見えるのはストロボ効果によると説明したが、この原理を応用したものにストロボスコープがある。その例をいくつか紹介しよう。図7はアナログプレーヤー全盛の時代に活躍した回転速度の調節シートである。今はCDプレーヤーが全盛で若い世代には馴染まないが、プレーヤーの回転速度は33 1/3回転/分と45回転/分のものがあり、交流電流が50Hzと60Hzの地域別にパターンが用意されていた。私のアナログプレーヤーもどこかに行ってしまい確かめることができないが、昔の電灯下では、確かに正しい回転数のとき模様が停止して見えたのである。

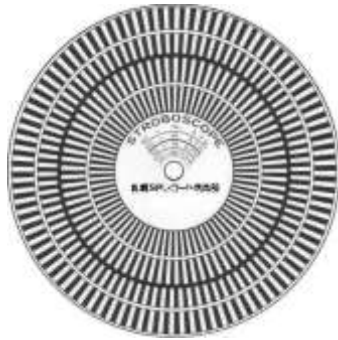


図7 回転速度を調整するシート

工業用に使われているものとして非接触式の数値計がある。数値計には接触式と非接触式があり、非接触式にストロボ効果が応用されている。回転体に反射テープを貼り付けて、赤色LED可視光線を反射させて読み取ることにより、測定物に接触せずに回転体の回転数を測定することができる。ある製品の詳細仕様によれば、測定が1～99999回転/分で精度は±0.02%で、かなり精度がいい。そして3Vの電圧で強力なキセノンフラッシュランプの断続する光を出すことになっている。測定は、フラッシュする速度を調整することによって、測定物が停止しているように見えたとき値を読み取ることになっている。測定対象はモーターなど高速で回転するものに用いられる。

ストロボスコープは医療用の機器にも応用されている。声帯粘膜は、発声時に100～300Hzの周期で振動するが、声帯疾患の発声時の微細な診断には測定が不可欠である。内視鏡にCCDカメラ等の映像機器を取りつけることで、映像による患部の確認が可能である。その他、超高速で運動する分子を、レーザー光を用いたストロボスコープの方法で観察する装置もある。このようにストロボ効果は多岐に用いられるが、その原理は最初に説明したように、扇風機が逆に回って見えるという現象にすべてが関係している。

参考文献

- (1) 西山豊「扇風機にひそむ数理」『卵はなぜ卵形か』日本評論社、1986、107-126

初出:「数学を楽しむ／扇風機の数理」『理系への数学』2006年8月、Vol. 39, No. 8, 57-60