赤と黒のゲーム必勝法

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

「数学を楽しむ／赤と黒のゲーム必勝法」『理系への数学』2010年9月，Vol.43, No.9, 22-25に掲載

1．勝率86%のゲーム

百人一首の絵札(読み札)を使った「坊主めくり」という遊びは意外と面白い．坊主が出ると自分の札を全部出さねばならないが，姫が出ると出された札が全部もらえる．名称とルールは地方によって若干の違いはあるが，百人一首の意味がわからない幼い子供にも楽しむことができる．坊主めくりの面白さは，手持ちの札がダイナミックに移動することだろうか．めくった札が坊主か姫かの偶然性を応用した遊びである．

一方，トランプの色が何色かを当てるゲームがある．トランプは赤色が26枚（ハートとダイヤモンド），黒色が26枚（スペードとクラブ）の合計52枚であるが，カードをよくシャッフルして裏向けにして机の上に置き，赤色か黒色かを二人で当てるゲームを考える．確率で考えると，まったく当たらない場合（0枚）と，全部当たる場合（52枚）を両極端として，平均して26枚が当たる，つまり正規分布に従うことが予想される．

赤色か黒色かの当たる確率は２分の１で等確率だから,坊主めくりのような面白さがないように思えるが,推定の仕方にちょっと工夫をすれば，平均の26枚どころか30枚を当てることが可能である．こんな面白い確率の話題が掲載されているのは，約20年前に発表されたケニス・ルヴァスールとドン・ザギエの２つの論文である([1],[2])．K.ルヴァスールは，でたらめに予測すると26点のところが，ある方法では30.007点になることを数学的に証明し，D.ザギエは，この結果を踏まえて，でたらめに赤と黒を言う相手に対して，勝率が86%のゲームになると述べている．一体，どういう作戦なのか，つぎに説明していこう．

“赤か黒が”のゲームは図１に示すように，最初にn枚の赤とn枚の黒があるとき，格子点(n, n)から始まり，格子点$(0, 0)$に到達するまでの下降する径路とみなすことができる．径路の途中の座標(r, b)は，赤のカードがr枚，黒のカードがb枚であることを示している．次のカードが赤ならば座標が$(r-1, b)$に，黒ならば$(r, b-1)$に移動する．このような径路をゲーム径路(game path)と呼ぶことにする．

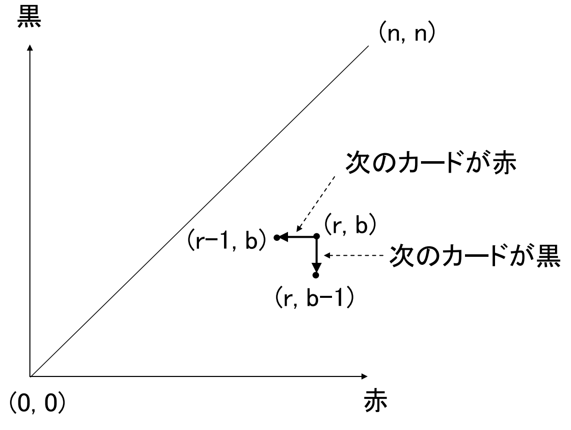

図１．ゲーム径路(game path)

2．対角線に出会うと0.5点増える

トランプの赤か黒か，コインの表か裏かのように１か０かの２つの状態をあつかう場合は，ランダム・ウ

ォーク，または最初に考察した数学者の名前をとってベルヌーイ試行(James Bernoulli, 1713)と呼ばれることがある．コインの裏表は裏と表が無限につづくベルヌーイ試行であるが，トランプの場合は赤と黒が 26 枚ずつであるので有限で，条件付きのベルヌーイ試行と見ることができる．

さて，格子点(n, n)から格子点$(0, 0)$までの，ゲーム径路は組合せを考えると，全部で${}_{2n}C_n$通りの径路が考えられるが，これらの径路においてとくに対角線に出会うことが，今回の予測に大きな効果をもたらすことを示そう．つまり，対角線に出会うたびに予測が 0.5 点ずつ増加していくというのだ．

今，格子点(n, n)から始めて，最初のカードが黒であるとしよう．図１では右下三角の領域であり，この最初のカードを知ることが 0.5 点の増加に貢献するのである．そして，ゲーム径路が，つぎの対角線上の点$(n-k, n-k)$に出会ったとしよう．このジグザグの径路において，最初の黒が出た直後から，「カードは赤である」と言い続けることにする．なぜならこの径路では，つぎの対角線$(n-k, n-k)$に到達するまで赤のカードは黒のカードより多いからだ．

赤のカード＞黒のカード

格子点(n, n)から格子点$(n-k, n-k)$までの径路は$2k$のカードを引くことになるが，１枚目はすでに黒色であるから，残り$2k-1$枚はk枚が赤で，$k-1$枚が黒である．そこで，$2k-1$枚に対して，「つぎは赤である」と言い続けるなら，k回が正しく$k-1$回が間違っていることになる．最初のカードの予測は赤か黒かわからないので確率が0.5であるから，予想する得点は可能な$2k$に対して$k+0.5$ということになる．

一方，乱数だけをたよりに推測する戦略では，当たる確率は２分の１であるから，格子点(n, n)から格子点$(n-k, n-k)$の間$2k$枚のうち当たるのはk枚である．$k+0.5$とkでは，その差が0.5である．このように対角線と出会えば出会うほど，この特別な0.5を予想の得点に加算することができるのだ．

たとえば，図２のようなゲーム径路では，格子点$(26, 26)$から格子点$(0, 0)$に向かうまでに対角線に出会う回数は（格子点$(0, 0)$を含むと）５回であるので，１回あたり0.5得点が加算されるので，平均得点 26 に加えると，得点の期待値は

$$26+0.5\times 5=28.5$$

となる．

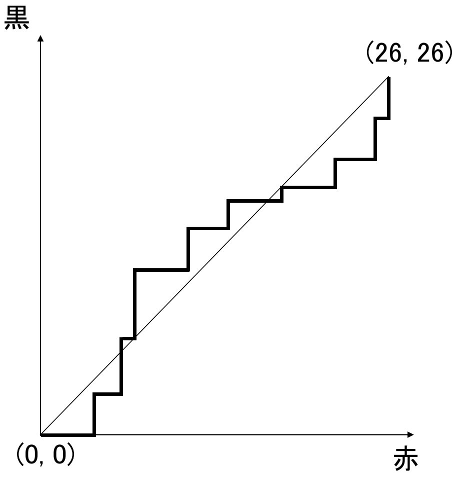

図２．対角線に出会うたびに 0.5 点増える．

あるゲーム径路pが対角線に出会う回数を$v(p)$とする．最初の格子点(n, n)も対角線に出会っているが，これを含めないので，$v(p)-1$が実際に対角線に出会う回数となる．それぞれに対して0.5点ずつ加算されるから，$0.5(v(p)-1)$点が増加する得点である．何も作戦を練らない，乱数だけを頼りにする平均得点はnであるから，$n+0.5(v(p)-1)$が予想得点となる．以上は径路pについてだけの予想得点であるが，全径

路Pについて総和をとり，径路の総数${}_{2n}C_n$で割ると，予想得点$S(n)$が次式のように計算できる.

$$S(n)=\sum_{p\in P}(n+0.5(v(p)-1))/C(2n,n)$$
$$=n+0.5((\sum_{p\in P}v(p)/C(2n,n))-1) \qquad (1)$$

このS(n)がどのように計算されるかをつぎに見ていこう.

３． 対角線に出会う総回数$V(n)$

ここでは，すべてのゲーム径路$p\in P$が対角線に出会う総回数$V(n)$を求めることから考えよう.

$\chi(p,m)$という変数を考え，径路pが対角線上の格子点(m,m)に出会うとき1，出会わないとき0の値をとるとする．対角線上の格子点は$(0,0)$から(n,n)までのn個あり，これらが，すべてのゲーム径路$p\in P$に対して計算しなければならないから次式のようになる．また，総和の順序を変えることが可能で，その式は，対角線上の格子点(m,m)に出会う径路の数であり，これを0からnまで変化させたときの総和となる.

以上を数式にまとめるとつぎのようになる．ただし，組合せの式$C(2m,m)$は${}_{2m}C_m$のことである.

$$V(n)=\sum_{p\in P}\left[\sum_{m=0}^{n}\chi(p,m)\right]=\sum_{m=0}^{n}\left[\sum_{p\in P}\chi(p,m)\right]$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\text{格子点 }(m,m)\text{ に出会う径路の総数}$$
$$=\sum_{m=0}^{n}C(2m,m)C(2(n-m),n-m)$$

ここで，最後の式をあらためて書きなおすと次式となる.

$$V(n)=\sum_{m=0}^{n}C(2m,m)C(2(n-m),n-m) \qquad (2)$$

この式において，総和の各項は，組合せ$C(2m,m)$と$C(2m,m)$の“たたみこみ”になっていることに注意すること.

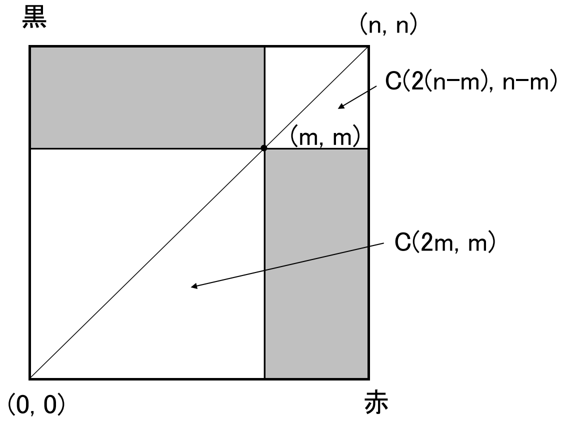

図３．$V(n)$の求め方

４．生成関数とたたみこみ

ゲーム径路が対角線に出会う総回数$V(n)$を計算するには前式(2)で十分であることは事実だ．最近のパソコンにある表計算ソフト（たとえば，マイクロソフト社のExcelでは，COMBINとう関数）を使えば，たちどころにこの値を計算してくれる．しかし，驚くなかれ，K.ルヴァスールの論文では，前掲(2)式は，次式まで簡略化している．

$$V(n)=4^n \qquad (3)$$

これによると，$V(2)=16, V(3)=64, V(4)=256$ などとなる．読者は，実際にこの式があっていることを確かめること．

さて(2)式から(3)式を導入するためには一足飛びにはいかない．「テーラー展開」，「生成関数」，「たたみこみ」などの数学の知識が必要である．以下，順を追って説明していこう．

証明のキーになるのは，$1/\sqrt{1-4z}$ をテーラー展開することである．するとその値が，$\sum_{n=0}^{\infty} C(2n,n)z^n$ になるのである．

テーラー展開すべき関数を $f(z)$ とすると，

$$f(z)=1/\sqrt{1-4z}=(1-4z)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f(0)=1$$

であり，よく知られているテーラー展開の公式

$$f(z)=f(0)+f^{'}(0)z+\frac{f^{''}(0)}{2!}z^2+\cdots$$

に関数 $f(z)$ と，導関数 $f^{'}(z),\ f^{''}(z),\ f^{(3)}(z),\cdots$ を求めて，それらに $z=0$ を代入すると，

$$f(z)=1+2z+6z^2+20z^3+70z^4+252z^5+\cdots$$

となる．この式の係数に注目すると，

$$f(z)=C(0,0)z^0+C(2,1)z^1+C(4,2)z^2$$
$$+C(6,3)z^3+C(8,4)z^4+C(10,5)z^5+\cdots$$

これで

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}}=\sum_{n=0}^{\infty} C(2n,n)z^n \qquad (4)$$

が証明されたことになる．

生成関数（generating function）の概念は，フィボナッチ数の一般項を求めるためにド・モアブルが用いたのは有名であり（1730年），確率の分野では母関数とも呼ばれている．

いま，数列$A=\{a, ar, ar^2, \cdots, ar^n\}$があるとき，その生成関数$G(A;z)$は，

$$G(A;z)=a+arz+ar^2z^2+ar^3z^3+\cdots$$

と表され，これは初項がaで，公比がrzの無限等比数列であり，数列の和を求めると次式となる．

$$G(A;z)=\frac{a}{1-rz}$$

なる.

いま，数列Dがあって，その生成関数が

$$G(D;\,z)=\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$$

で表わされるとするならば，数列$D*D$に対する生成関数は

$$G(D*D;\,z)=\frac{1}{1-4z}$$

となる．この関係を使って証明していこう．ここで
$D*D$は「たたみこみ」と呼ばれるもので，この考え方が必要なので，それを補足しておこう．

２つの数列$\{a_k\},\{b_k\}$から新しい数列$\{c_k\}$を導く演算は確率ではしばしば出てくる．

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$$

で定義された新しい数列$\{c_k\}$は$\{a_k\}$と$\{b_k\}$のたたみこみと呼ばれ，

$$\{c_k\}=\{a_k\}*\{b_k\}$$

と書く．数列の添字にとくに注意すること．対応する数列の項を前から順番にかけあわせるのではなく，いわゆる“たすきがけ”になっている．たたみこみは，重畳，結合などの用語で使われることもある．英語ではconvolution，ドイツ語ではfaltung，フランス語ではcompositionである．

さて，生成関数に対しても「たたみこみ」があり，それはつぎのようになる．数列$A=\{a_k\}$に対する生成関数を$G(A;\,z)$，数列$B=\{b_k\}$に対する生成関数を$G(B;\,z)$とするとき，

$$G(A;z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$
$$G(B;z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n$$

であり，

$$\begin{aligned}&G(A;z)\times G(B;z)\\&=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n)\\&\quad\times(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n)\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z\\&\quad+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\&\quad+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n\\&\quad+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_nb_1)z^{n+1}+\cdots\\&\quad+a_nb_nz^{2n}\end{aligned}$$

となるから，生成関数の各項の係数をみると，これが数列Aと数列Bのたたみこみになっていることから，生成関数においてもたたみこみが成り立つことがわかる．

さて，式(4)より，数列$D=\{{}_{2k}C_k\}=\{C(2k,\,k)\}$とするとき$D$と$D$のたたみこみを$D*D$とすると，

$$G(D*D;z)=G(D;z)^2=\frac{1}{1-4z} \qquad (5)$$

となる．$D*D=V$ としたとき，

$$V(n)=4^n$$

である．なぜなら，数列

$$V=\{4^0,4^1,4^2,4^3,\cdots,4^n\}$$

に対する生成関数$G(V;z)$ は，

$$G(V;z)=4^0+4^1z+4^2z^2+4^3z^3+\cdots$$
$$=\frac{4^0}{1-4z}=\frac{1}{1-4z}$$

となることからも確認できる．このようにして式（1）は

$$S(n)=n+0.5((4^n/C(2n,n))-1)$$

でおきかえられる．組合せの公式にスターリングの公式（この公式の証明については文献[3]などに詳しいので，興味がある読者は参照のこと）

$$n!=\sqrt{2\pi n}(n/e)^n+O(\sqrt{2\pi/n}(n/e)^n)$$

を適用すると，さらに整頓され最終的には予想得点は次のようになる．

$$S(n)=n+0.5(\sqrt{n\pi}-1)+O(1/\sqrt{n}) \qquad (6)$$

この式において，$n=26$ を代入するとトランプの場合であり，$S(26)=30.007$ となる．つまり，52 枚のカードのうち約 30 枚を当てることができ，通常の 26 枚より４枚多く当てることができる．$n=100$ の場合は，$S(100)=108.290$ である．

また，図４に示すように，乱数だけをたよりにする得点分布と式（6）による得点分布を重ねてみた（$n=26$）．分布は最低が 26 点で，中央値が 30 点あたりの分布となった．

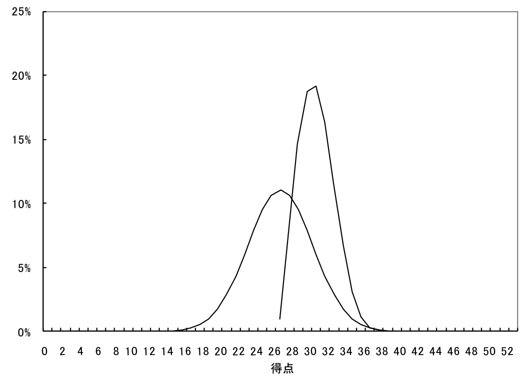

図４．でたらめ方式と戦略方式の得点分布

５．実践に向けて

式（6）が最終の式となるが，式（2）からでもパソコンさえあれば，十分にS(n)の値は計算できる．その場合は，カタラン数

$$C(n)=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}={}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}$$

と，重複組合せ

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

の考え方が必要となる．しかし，パソコンがこれほど普及しなかった時代にすでに，式の推論と展開だけで式（6）まで求めている数学者の頭脳に驚かされる．人間はコンピュータより偉いのだ！

理論上は図２に示すように対角線に出会うたびに得点が 0.5 点増加することでよいが，実際にトランプで試す場合は，つぎのように手順を簡単にしておくとよい．

(1) 1 枚目は，とりあえず黒色と宣言しておく．

(2) めくったカードが赤色なら，黒色のほうが多いということで「黒カード＝赤カード」になるまで，黒色と言い続ける．

(3) めくったカードが黒色なら，赤色のほうが多いということで，「赤カード＝黒カード」になるまで，赤色と言い続ける．

対角線を超えると得点が 1 点増える．図５では対角線を２回超えているので，得点は 28 点（$26+2=28$）となる．

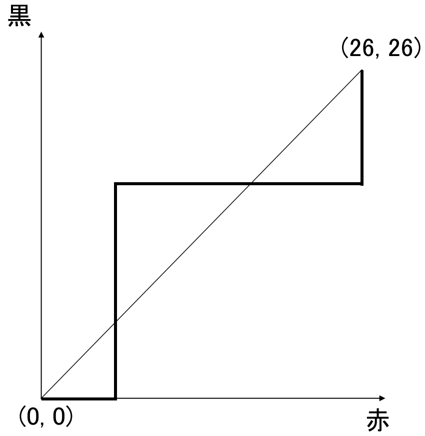

図５．対角線を超えると１得点増える．

参考文献

[1] Kenneth M. Levasseur, How to Beat Your Kids at Their Own Game, Mathematics Magazine, Vol. 61, No. 5, December 1988, 301-305

[2] Don Zagier, How Often Should You Beat Your Kids? Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 2, April 1990, 89-92

[3]W.フェラー，河田龍夫監訳『確率論とその応用 I 上』紀伊國屋書店，1960, 72-76

（にしやまゆたか／大阪経済大学）