

Sudoku がイギリスで大ブレイク

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8 大阪経済大学 情報社会学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

初出：西山豊「Sudoku がイギリスで大ブレイク」『数学セミナー』日本評論社，
Vol. 45, No. 5, 40-44, 2006. 5

1. Sudoku の本がベストセラーに

2005 年度はイギリス留学の機会があって 1 年間ケンブリッジで研究することになった。去年の 5 月頃、イギリスの仲間から「日本の Sudoku というパズルがあるが、このパズルの一般解法がないか」と尋ねてきた。そういうパズルがあったかなと思って、よく考えてみるとイギリス人は Sudoku を「スドク」と発音していたのである。余談ではあるが日本の Karaoke を「カリオキ」と発音している。そういえば日本では電車の中で仕事に疲れきった勤め人がこのパズルにとりつかれたように取り組んでいる姿を見たことがあり、一部の人が遊ぶちょっと不健康なパズルのように思えて、私は一度も試したことがなかった。そして、このパズルの正式名称も知らなかった。

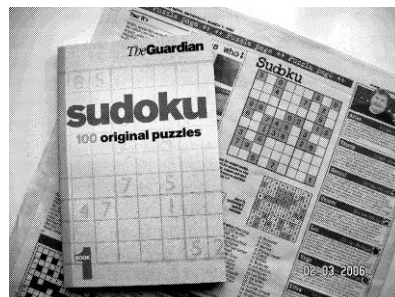
Sudoku, つまり日本名の「数独」はパズル雑誌『パズル通信ニコリ』で使用されている名称で「すうどく」と発音し、「数字は独身に限る」を略したもので、1986 年ごろから日本で流行っているパズルである。このパズルには前身があり、1970 年代にニューヨークで DELL 社（今のパソコン会社とは無関係）のパズル雑誌に「ナンバープレース」（数字を置いていく、の意味）として流行したものを日本で「数独」という名前に変えたものである。ニューヨークの「ナンバープレース」が日本の「数独」になり、この「数独」が英語名を「Sudoku」として今イギリスで流行っているのである。ナンバープレースではなく日本名の Sudoku であるのがちょっと嬉しかった。

このパズルがイギリスでどの程度親しまれているかを調べてみた。去年の春

頃からイギリスの一流新聞「タイムズ」や「ガーディアン」が Sudoku を取り上げたのをきっかけに、一般の新聞やコミュニティー紙でもいっせいに Sudoku の問題を載せるようになった。現在はその新聞社が出題した問題が本になっている。日本でいうなら読売新聞や朝日新聞が Sudoku のパズル本を出していることになる。書店に行けば Sudoku の本がベストセラーとして書棚のトップに並べてある。あるテレビ局の番組を見ていたら、タレントとの対談があり「Sudoku を楽しんでますか」とインタビュアーが問いかけると「もちろんです」と答えるシーンがあった。私のお隣の奥さんは毎日の新聞に載る Sudoku を解くのが楽しみで日課になっているという。Sudoku は女性にも人気があり、解く人の姿はどこか明るく感じられた。

7月にニューカッスの巨大なショッピング・センターで開催された数学展示会ではトピックスとして Sudoku コーナーがあった。数学教育研究所のスタッフが担当し Sudoku の教具一式をそろえていた。教材までできているのには驚いた。ケンブリッジまでの帰りの電車の中では学生が一生懸命パズル本に取り組んでいる。何のパズルかと思えば Sudoku の問題であった。最近では Sudoku がゲーム機になったものがあり、バスの中ではゲーム機で Sudoku を楽しんでいる姿を見かけることがある。あとで触れるが Sudoku はクロスワード・パズルのように紙と鉛筆ではなく、パソコン向きなのかもしれない。

ここまでくれば、ブームは本物である。私は Sudoku のドクは「毒」の意味があり、このパズルの中毒から抜け出せなくなるとジョークのつもりで言ったがイギリス人には通じなかった。



書店の棚に Sudoku のコーナーができています (左)。「ガーディアン」の単行本と掲載コラム (右)。

2. Sudoku の数理

Sudoku は意外と隠れファンがいるのであるが、ここでは Sudoku が初めてという方のためにルールと簡単な解き方を説明しよう。

◎ Sudoku の基本ルール

Sudoku は、 3×3 のブロックに区切られた 9×9 の正方形の枠内に 1 から 9 までの数字を入れるパズルの一つである。 3×3 のブロックの中、および 9 個の行、9 個の列に数字をそれぞれ重複しないように置いていくというものである。

Sudoku の由来「数は独身に限る」とはよく言ったもので重複してはダメで必ず独りということである。図 1 の例では合計 $9 \times 9 = 81$ のマス目に 30 個の数字がすでに表示されている。この数字をヒントにして数字を埋めていくのである。ヒントの与え方にはヒントの位置が対称型と非対称型がある。図 1 は対称型である。

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

図 1. Sudoku の例

◎ 試行錯誤による解法

例えば、上から 1 行目にはすでに 5 が入っているから、この行には 5 はもう入らない。2 行目にも 5 が入っているから、2 行目にも 5 はもう入らない。また、右から 1 列目にはすでに 5 が入っているから、この列には 5 はもう入らない。1 行目、2 行目、右から 1 列目に 5 は入らないという意味の消去の線を引き、 3×3 ブロックで見た場合の右上のブロックには、すでに 6 が入っていて、入る余地のあるマス目は 1 個しかないのでここに 5 が確定する。このようにして 3 行 7 列目の数字が埋まったことになる(図 2)。

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

図 2. 解法の例

(5 の位置が決まる)

このような手順で数字を試行錯誤的に埋めていくのだが、どのような方法が最適かを数学的に証明するのは難しい。ただ、経験的にはすでに表示されているヒントの数字や個数が多いものから手をつけるほうが早く完成に近づく。9個の場所に8個埋まっていれば、あと1個は明らかであり、7個埋まっていれば6個埋まっているより答えが見つかりやすいということだ。図1ではヒントの8が5個、2が2個であるから、数字の8から始める方が効率的である。

◎ 生成できるパターンの数

すべての数字が埋められると図3のようになる。これが Sudoku の完成パターンである。9行のどの行をとっても、9列のどの列をとっても、3×3ブロックのどのブロックをとっても、数字は1から9までの数字で重複していない。

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

図3. 完成パターン

数字が重複せずバランスよく配置されている完成図を見て、読者はある種の“美”を感じないだろうか。このような数字の配置はどの程度あるのだろうか。私は少ないのではと予想したが、調べてみると、かなりのパターンが可能であることがわかった。たとえば、ひとまわり小さい2×2のブロックに区切られた4×4の正方形のモデルで計算してみると288個のパターンがあった。9×9のSudokuではもっとパターンが多くなることが予想される。

これを実際に計算した人がいる。B. フェルゲンハウエルとF. ジャービスはこの数は

$$6,670,903,752,021,072,936,960 \approx 6.671 \times 10^{21}$$

であり、もとの式は、

$$9 \times 72^2 \times 2^7 \times 27,704,267,971$$

としている[2]。式の最後の項は素数である。素数ということは分解不可能で、これが数式で表される最高の形であることになる。この式と値が正しいものであるか私は検証していないが、たぶん間違いはないであろう。相当の数のパター

ンができるということであり，Sudoku パズルが枯渇する可能性は低いといえそうだ。

◎ 解の一意性

Sudoku は $9 \times 9 = 81$ 個のマスキ目に数字を入れていくパズルだが，ヒントとしてあらかじめ数字が表示されていて，その個数はほとんどが 20 から 36 個の範囲である．図 1 の場合は表示されているのは 30 個であり，一意な解の図 3 に到達した．表示されているヒントの数が少なくなればそれだけ別解が出やすくなる．極端な話として， $9 \times 9 = 81$ のマスキ目がすべて空白であれば，無限に近い別解がある

ということであり，80 個埋まっていれば別解の余地がないということである．

それでは別解がでないためのヒントの最小個数はいくつなのだろうか．これは，きちんと数学的に証明されたわけではないが，いままでに発表されたもので非対称型の Sudoku は 17 個のものがある．対称型の Sudoku は 18 個である．非対称型 Sudoku の最小問題， $n=17$ の一例を図 4 に示しておく．これはインターネットに公開されたもので G. ロイルが提示している 450 個の最小 Sudoku のうちのひとつである [3]．ヒントが少ないので難解であるが，解はユニークに決まる．

						3	1
6			2				
			7				
	5	1		8			
2					6		
		3				7	
			4		2		
	3	5					
7							

図 4 最小 Sudoku の例
(非対称型， $n=17$)

◎ オイラーのラテン方陣を応用

Sudoku，「数独」「ナンバープレース」の起源は 18 世紀にスイスの数学者オイラーが考案したラテン方陣にまでさかのぼる．

ラテン方陣とは行と列に数字が重複しないようにしたものである．図 5 では 1 から 4 までの数字が各行に入っていて，各列にも 1 から 4 までの数字が重複せずに入っている． 4×4 のラテン方陣を 2×2 のブロックに区切る．そして，このブロック内においても 1 から 4 までの数字が重複しないように条件を厳し

くしたのが Sudoku である. したがって Sudoku はラテン方陣の応用とみることができる.

一般に $n^2 \times n^2$ のラテン方陣は $n \times n$ のブロックに分けることができて Sudoku を作るすることができる. Sudoku は 9×9 のものがポピュラーだが上級コースとして 16×16 のものもある.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

ラテン方陣

Sudoku

図5 ラテン方陣と Sudoku

Sudoku とラテン方陣を説明して

きたが, これらは数学としての要素が多く含まれている. パズルを解くだけでなく, つぎのような手頃な大学入試問題を作ることができる. 4×4 のマス目で, ラテン方陣となるのは何通りで, Sudoku となるのは何通りであるか. 答えは, ラテン方陣となるのは $4! \times 3! \times 4 = 576$ で, Sudoku となるのは $4! \times 2! \times 6 = 288$ である. これらはパソコンを使わずに紙と鉛筆で解ける. 興味のある読者は計算して下さい.

さて, オイラーは $n = 5$ のラテン方陣について, その個数が $5! \times 4! \times 56$ であることを示している (1782 年). Sudoku との関係でいえば, $n = 9$ のラテン方陣は S. E. バンメルと J. ロードシュタインが

$$9! \times 8! \times 377,597,570,964,258,816$$

であることを示している (1975 年) [4]. 計算にあたっては当時のコンピュータ PDP-10 が使われている. この式を最後まで計算すると,

$$5,524,751,496,156,892,842,531,225,600$$

$$\approx 5.525 \times 10^{27}$$

となる. $n = 9$ のとき, ラテン方陣の数は 10^{27} の, Sudoku の数は先に示したように 10^{21} のオーダーであるので, Sudoku はラテン方陣の約 10^{-6} であり, 制限されたパターンであることがわかる. それにしても Sudoku の数は 10^{21} 個もあり天文学的数字であることに変わりない.

ラテン方陣にしても Sudoku にしても数字の並び方が実にバランスがよい.

このバランスのよさに注目して、ラテン方陣はすでに実験計画法の分野で応用されている。Sudoku の配置についても統計の分野に応用されると新しい研究の分野が開けるのではないだろうか。今後が期待される。というわけで、私もイギリスでは Sudoku に挑戦してみた。そして試行錯誤ではあるが、どんな問題が出されても時間さえかければ解答できるというレベルに達した。Sudoku はたしかに達成感の味わえるパズルである。数字のバランスのよさだろうか。また、クロスワード・パズルのように鉛筆と消しゴムというスタイルには向かないような気がする。それは、難しい問題になると数字の配置を仮定することが多く、行き詰った場合どこまで戻ればよいのかわからなくなるからだ。これはやはりパソコン向きのパズルではないだろうか。

3. 遊びの精神が健在なイギリス

Sudoku は日本ではパズルファンの中にしか流行らないと思っていたが、イギリスでは国民全体が楽しんでいるように思える。なぜなのだろうか。この違いはどこにあるのかを考えてみた。Sudoku に似たものとしてクロスワード・パズルはイギリスが発祥地である。また、アガサ・クリスティ、コナン・ドイルなどの都会型の推理小説もイギリスで誕生している。雨の多いどんよりとした天候、家の中に閉じこもることが多い中、パズルや推理小説に楽しみを見出すというイギリスの気候と国民性にあるのではとも考えてみた。

イギリスを含めヨーロッパでは Sudoku を愛好する人々とともに、Sudoku を研究する数学者も多い。Sudoku を研究課題にしても白い目で見られることはない。そして立派な論文が多く出ている。日本でなら魔方陣や虫食い算の研究に没頭していたら、あれは数学マニアが趣味ですること、数学者ではないというレッテルが貼られることであろう。

イギリスの人口は約 6000 万で日本の半分である。生物学的に見て日本の方が優れた研究者が 2 倍いてもおかしくはない。18 世紀の産業革命から 19 世紀のビクトリア王朝時代の最盛期までイギリスが成功したのは、その機構ではないだろうか。大英帝国の成功の影にはアジア、アフリカの植民地から多くの富を得たという歴史の経過も忘れてはならないが、数学を始め科学技術が国を発

展させたという認識があり、今でも数学や数学者を大事に扱ってくれる。さらに汎用性のある英語という言語を持っていたことも強みである。日本語は文学性に富むが難しい言語で汎用性には欠ける。

この時期にイギリスでは数学者として微積分のニュートン、対数のネピア、ブール代数のブールが、物理学ではキャベンディッシュ、電磁気学のマクスウェル、化学者のファラデー、進化論のダーウィンなど多くの科学者を輩出している。ケンブリッジのキャベンディッシュ研究所にはいまでも世界中の研究者が集まってくる。DNAの二重らせんを発見したワトソンとクリックをはじめ70名のノーベル賞学者がケンブリッジで育っている。数学者のラマヌジャンもトリニティ・カレッジに在籍していたことがあり、フェルマーの最終定理を証明したワイルズはケンブリッジ出身である。

このように数学や科学は国を興し繁栄させたという自負と認識があり、国民は数学を大事にする。一方、日本では「受験の数学」の言葉で表現されるように、数学が受験生の能力を選別する手段だけに使われている。やや、イギリス最良の説明になってしまったが、最良の分を差し引いても説明の半分はあっているのではないだろうか。

私は、2005年4月からケンブリッジに留学の機会を得た。1971年に数学科を卒業しているが大学院の経験がなく研究といえば雑誌『数学セミナー』に発表してきた遊びの記事がほとんどである。この中から「ブーメランの飛行力学」、「五弁の謎」と「不動点の作図」を英訳して留学をアプライした。4月にケンブリッジについてみると宇宙物理学者ホーキングと同じ相対性理論のグループに配属され個人研究室が用意されていた。極端に言えば、ブーメランの記事がケンブリッジで認められた



トリニティ・カレッジの正門。
ニュートン、ラマヌジャンもここで学んだ。

ということである．ここには面白いものは何でも見てやろうという昔の大学のよさが残っているような気がする．**Sudoku** を数学のひとつとして受け入れるイギリスの風土を感じるとともに，日本の数学と数学者のありかたについて考えさせられた1年でもあった．

参考文献

- (1) インターネットのフリー百科事典 Wikipedia より Sudoku の項を参照．
- (2) B. Felgenhauer, F. Jarvis, *Enumerating Possible Sudoku Grids*, 2005.
- (3) G. Royle, *Minimum Sudoku*, 2005.
- (4) S. E. Bammel, J. Rothstein, *the Number of 9×9 Latin Squares*, *Discrete Mathematics*, 11(1975), 93-95.

初出「Sudoku がイギリスで大ブレイク」『数学セミナー』日本評論社，2006. 5